Lineare Algebra II: Übungsstunde 11

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

12.05.2025

1 Quiz 23: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 23.1

Definition (Tensorprodukt zweier Vektorräume)**.** *V, W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K mit Basen $\{v_i\}_{i\leq n}$ und $\{w_j\}_{j\leq m}$. Definiere die Menge*

$$S := \{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \tag{1}$$

und damit das Tensorprodukt als Vektorraum über S oder:

$$V \otimes_K W := K(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot (v_i \otimes w_j) \,\middle|\, a_{ij} \in K \right\}. \tag{2}$$

1.2 Aufgabe 23.2

Da hier das $\mathbb{R}$-Tensorprodukt gebildet wird, betrachten wir $\mathbb{C}$ als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{1, i\}$. Damit haben wir eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\} \tag{3}$$

und schreiben damit alle Tensoren in eine Linearkombination dieser Basisvektoren um:

$$1 \otimes i + i \otimes 1 = v_2 + v_3 \tag{a}$$
$$2 \otimes 2i = 4 \cdot (1 \otimes i) = 4v_2 \tag{b}$$
$$2i \otimes 2 = 4 \cdot (i \otimes 1) = 4v_3 \tag{c}$$
$$\begin{aligned}(1+i) \otimes (1+i) &= 1 \otimes (1+i) + i \otimes (1+i) \\ &= 1 \otimes 1 + 1 \otimes i + i \otimes 1 + i \otimes i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4\end{aligned} \tag{d}$$
$$4 \cdot (1 \otimes i) = 4v_2, \tag{e}$$

womit nur (b) und (e) dasselbe Element darstellen.

2 Feedback Serie 23

2. Vorsicht: Wir sind in $\mathbb{R}$, womit f keine komplexen Eigenwerte haben darf, sondern möglicherweise weniger als n hat. Vorsicht ist ebenfalls geboten bei der Anwendung des Spektralsatzes: Da wir in $\mathbb{R}$ sind, gilt im Allgemeinen: A normal $\not\Longrightarrow$ A orthogonal diagonalisierbar.

6. Die Matrizen Q, R für $A = QDR$ müssen unitäre Matrizen sein, also müssen die Eigenvektoren von AA^* normalisiert werden.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Äussere direkte Summe, Tensorprodukt, Komplexifizierung.

3.1 Zusätzliches Material

Vorsicht: Das kartesische Produkt zweier Vektorräume verhält sich (auf Dimensionen und Vektoren bezogen) nicht wie ein Produkt, sondern wie eine Summe (denke an $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$)! Deshalb definieren wir in der linearen Algebra zusätzlich die (äussere) direkte Summe, welche (formal) das kartesische Produkt um die Vektorraumstruktur erweitert.

Der Unterschied zwischen Tensorprodukt und äusserer direkter Summe wird klar, wenn man sich ein paar konkrete Beispiele anschaut:

- Wenn wir die äussere direkte Summe von $\mathbb{R}$ mit sich selbst bilden (was dem kartesischen Produkt mit zusätzlicher Vektorraumstruktur entspricht), erhalten wir $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$, also einen neuen, zweidimensionalen Vektorraum.

- Wenn wir das Tensorprodukt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst bilden, erhalten wir $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, was sich mit der Wahl einer Basis begründen lässt: Da $\{1\}$ eine Basis von $\mathbb{R}$ ist, erhalten wir mit $\{1 \otimes 1\}$ eine Basis von $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, welche uns aber wieder nur einen eindimensionalen Vektorraum liefert (wir können Skalare frei von links nach rechts verschieben, ohne dass sich was ändert).

Definition (Reiner Tensor). *Ein Element $x \in V \otimes W$ heisst reiner (einfacher/elementarer) Tensor $\iff$ x als ein einziges «Symbol» geschrieben werden kann: $x = v \otimes w$.*

Dies kann man anders ausdrücken, wenn man die Koeffizientenmatrix $(a_{ij}) =: A$ des Tensors betrachtet: Ein Element $x \in V \otimes W$ heisst reiner (oder einfacher/elementarer) Tensor $\iff$ $\operatorname{rk} A = 1$.

Man kann diese Matrixform für nicht zu komplizierte Tensoren direkt berechnen: Betrachte $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots$. Die Koeffizientenmatrix dieses Tensors ist:

$$v_1 \cdot w_1^\top + v_2 \cdot w_2^\top + \ldots, \tag{4}$$

wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation bezeichnet. Da der Rang einer Matrix invariant unter Basiswechsel ist, gilt die Regel mit dem Rang des Tensors unabhängig von der Wahl der Basis, sprich: Wenn eine einheitliche Basis für alle Summanden des Tensors gewählt wird, stimmt der Rang der Matrix mit dem Rang des Tensors überein.

Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes Wir betrachten K-Vektorräume U, V, W mit $\Phi : V \oplus W \to U$ bilinear $\implies \exists! \phi : V \otimes W \to U$ linear, sodass $\Phi = \phi \circ \otimes$, wobei $\otimes : V \oplus W \to V \otimes W$ bilinear definiert ist. Damit haben wir das bilineare Tensorprodukt mithilfe von ϕ «linearisiert».

Die (eindeutige) Existenz von ϕ mit den oben genannten Eigenschaften nennen wir die *universelle Eigenschaft des Tensorproduktes*.

Mithilfe der universellen Eigenschaft können wir das Verhalten des Tensorproduktes analysieren und merken, dass es sich – wie erwartet – wie ein Produkt verhält:

1. Zwei nicht-null Vektoren erzeugen einen nicht-null Tensor (und umgekehrt): $0_V \neq v \in V \wedge 0_W \neq w \in W \iff v \otimes w \neq 0_{V \otimes W}$. (Implikation: Satz 16.4.1)

2. Kommutativität (bis auf Isomorphismus): $V \otimes W \cong W \otimes V$ (Satz 16.4.2)

3. Assoziativität (bis auf Isomorphismus): $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$ (Lemma 16.4.3)

4. Distributivität (bis auf Isomorphismus): $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ (Lemma 16.4.3)

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- HS01: 7.4
- FS03: 7.5
- HS04: 5i
- HS05: 7j

Weitere Aufgaben:

- HS02: 7.4
- FS04: 7b

Tipps zur Serie 24 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 24

Versuche zuerst 1, 2 (4) zu lösen, und schau dir sicher die Aussage von 5 an, und versuche, dazu ein paar Beispiele aufzuschreiben und durchzurechnen.

1. $K(S)$ ist nur über «formale» Summen definiert (und nicht für reale Summen).
2. Zerlege alles in Linearkombinationen der Einheitsvektoren (und schreibe die Koeffizienten beispielsweise in eine Tabelle, um diese nachher in eine einfachere Ordnung zu bringen).
3. Aufwändig: Beweis von Lemma 16.4.3. Gehe ähnlich vor wie in den Beweisen von Satz 16.3.8 und Lemma 16.3.9 und verwende für (a) eine trilineare und für (b) zwei bilineare Abbildungen.
4. b) Benutze die adjungierte Abbildung.

   c) Die λ_j sind die Eigenwerte der Matrix. Versuche die Aussage zuerst für eine (2×2)-Matrix
   $$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$
   zu beweisen (mithilfe expliziter Rechnung mit Eigenvektoren) und folgere daraus die Aussage für allgemeine Matrizen.
5. Dieser Beweis braucht zwei Teile:

   i) Zeige mithilfe zweier Basen und der Definition des Tensorproduktes, dass sich jeder Tensor als Summe von n reinen Tensoren schreiben lässt.

   ii) Zeige, dass ein Tensor existiert, der sich *nicht* als Summe von $n-1$ reinen Tensoren schreiben lässt (zum Beispiel mithilfe des n-ten Basiselements von V_2^*).