Lineare Algebra II: Übungsstunde 13

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

26.05.2025

1 Quiz 25: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 25.1

Wir berechnen das charakteristische Polynom und erhalten daraus die Eigenwerte:

$$\chi_A(x) = (-1-x)^2(-2-x) \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \tag{1}$$

Um die Jordansche Normalform endgültig zu bestimmen, brauchen wir nur noch die geometrische Vielfachheit von λ_1. Wir lösen dau beispielsweise die Eigenvektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 \\ 2v_3 - v_1 \end{pmatrix} \implies v_2 = 0, v_1 = v_3 \implies g_{-1} = 1, \tag{2}$$

woraus wir die Dimension des Eigenraumes bestimmen.

Damit ist die vollständige gesuchte Jordansche Normalform:

$$\boxed{J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{3}$$

1.2 Aufgabe 25.2

Mit «wohldefiniert» ist hier basisunabhängig gemeint. Dies zeigen wir über die Eigenschaften der Determinanten, wobei $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ zwei Basen von V sind:

$$\begin{aligned} \det[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} &= \det([\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}) && (4)\\ &= \cancel{\det[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}} \det[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cancel{\det([\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}})^{-1}} && (5)\\ &= \det[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} && (6)\\ &=: \det T && (7) \end{aligned}$$

2 Feedback Serie 25

1. Vorsicht mit der Notation von Abbildungen von Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi : V^* \times W &\to \mathrm{Hom}(V, W) \\ (\ell, w) &\mapsto \ell(v)w \end{aligned}$$

ist keine richtige Notation, da $W \ni \ell(v)w \notin \mathrm{Hom}(V, W)$, und v nicht definiert ist. Besser ist:

$$\begin{aligned} \varphi : V^* \times W &\to \mathrm{Hom}(V, W) && (8) \\ (\ell, w) &\mapsto (v \mapsto \ell(v)w), && (9) \end{aligned}$$

wie in der Musterlösung, oder ähnlich:

$$\begin{aligned} \varphi : V^* \times W &\to \mathrm{Hom}(V, W) && (10) \\ (\ell, w) &\mapsto \varphi(\ell, w) && (11) \\ \varphi(\ell, w)(v) &:= \ell(v)w. && (12) \end{aligned}$$

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Alternierendes Produkt, Wedge-Produkt.

3.1 Zusätzliches Material

Lemma 16.9.16 lässt sich zusammenfassen:

Lemma 1 (16.9.16a)**.** *Das Wedge-Produkt ist r-linear und alternierend.*

Diese Eigenschaften des Wedge-Produktes sehen wir im Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$.

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:*
`https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- FS02: 3
- FS02: 7.3

Weitere Aufgaben:

- FS03: 5